

1 解答 $13-4\sqrt{5}$

$$\sqrt{4} < \sqrt{5} < \sqrt{9} \text{ であるから } 2 < \sqrt{5} < 3$$

したがって $a=2$

$$\sqrt{5} \text{ から } a \text{ をひいたものが } b \text{ であるから } b = \sqrt{5} - a = \sqrt{5} - 2$$

$$\text{よって } a^2 + b^2 = 2^2 + (\sqrt{5} - 2)^2$$

$$= 4 + (5 - 4\sqrt{5} + 4)$$

$$= 13 - 4\sqrt{5}$$

2 解答 (1) $5-2\sqrt{3}$ (2) $32-6\sqrt{14}$ (3) $-12+12\sqrt{3}$ (4) $-180+80\sqrt{6}$

$$(1) \sqrt{1} < \sqrt{3} < \sqrt{4} \text{ であるから } 1 < \sqrt{3} < 2$$

よって $a=1, b=\sqrt{3}-1$

$$\text{ゆえに } a^2 + b^2 = 1^2 + (\sqrt{3} - 1)^2$$

$$= 1 + (3 - 2\sqrt{3} + 1)$$

$$= 5 - 2\sqrt{3}$$

$$(2) \sqrt{9} < \sqrt{14} < \sqrt{16} \text{ であるから } 3 < \sqrt{14} < 4$$

よって $a=3, b=\sqrt{14}-3$

$$\text{ゆえに } a^2 + b^2 = 3^2 + (\sqrt{14} - 3)^2$$

$$= 9 + (14 - 6\sqrt{14} + 9)$$

$$= 32 - 6\sqrt{14}$$

$$(3) \sqrt{9} < \sqrt{12} < \sqrt{16} \text{ であるから } 3 < \sqrt{12} < 4$$

よって $a=3, b=\sqrt{12}-3$

$$\text{ゆえに } a^2 - b^2 = 3^2 - (\sqrt{12} - 3)^2$$

$$= 9 - (12 - 6\sqrt{12} + 9)$$

$$= -12 + 6\sqrt{12}$$

$$= -12 + 12\sqrt{3}$$

$$(4) \sqrt{4} < \sqrt{6} < \sqrt{9} \text{ であるから } 2 < \sqrt{6} < 3$$

よって $a=2, b=\sqrt{6}-2$

$$\text{ゆえに } a^4 - b^4 = (a^2 + b^2)(a^2 - b^2) = [2^2 + (\sqrt{6} - 2)^2][2^2 - (\sqrt{6} - 2)^2]$$

$$= \{4 + (6 - 4\sqrt{6} + 4)\}[4 - (6 - 4\sqrt{6} + 4)]$$

$$= (14 - 4\sqrt{6})(-6 + 4\sqrt{6})$$

$$= -84 + 56\sqrt{6} + 24\sqrt{6} - 96$$

$$= -180 + 80\sqrt{6}$$

3 解答 (1) $18-4\sqrt{7}$ (2) $1-\sqrt{2}$

$$(1) \sqrt{4} < \sqrt{7} < \sqrt{9} \text{ であるから}$$

$$2 < \sqrt{7} < 3$$

よって $a=2, b=\sqrt{7}-2$

$$\text{このとき } a^2 + 2ab + 2b^2 = (a+b)^2 + b^2$$

$$= [2 + (\sqrt{7} - 2)]^2 + (\sqrt{7} - 2)^2$$

$$= 7 + 7 - 4\sqrt{7} + 4$$

$$= 18 - 4\sqrt{7}$$

$$(2) \sqrt{1} < \sqrt{2} < \sqrt{4} \text{ であるから}$$

$$1 < \sqrt{2} < 2$$

よって $-2 < -\sqrt{2} < -1$

ゆえに $1 < 3 - \sqrt{2} < 2$

したがって $a=1, b=(3-\sqrt{2})-1=2-\sqrt{2}$

$$\text{よって } a + \frac{8}{b^2 - 6} = 1 + \frac{8}{(2-\sqrt{2})^2 - 6}$$

$$= 1 + \frac{8}{4 - 4\sqrt{2} + 2 - 6}$$

$$= 1 + \frac{8}{-4\sqrt{2}}$$

$$= 1 - \frac{2}{\sqrt{2}}$$

$$= 1 - \sqrt{2}$$