放物線と直線③　解答と解説

1 解答　(1)　$y=x+4$　　(2)　$a=\frac{1}{2}$

(1)　直線 AB は，傾きが $\frac{4-0}{0-(-4)}=1$，切片が 4 であるから，直線 AB の式は

$$y=x+4$$

(2)　直線 AB と放物線 $y=ax^2$ の交点は 2 つある。

2 つの交点のうち，x 座標が小さい方の点は，線分 AB 上にある。この点を P と考えると，△OPB の面積は △OAB の面積より小さくなる。

△OAB の面積は $\frac{1}{2}\times4\times4=8$ であるから，△OPB の面積が 8 となることはない。

よって，点 P は直線 AB と放物線 $y=ax^2$ の 2 つの交点のうち，x 座標が大きい方の点である。

OB=4 であるから，△OPB の面積が 8 となるためには，P の x 座標が 4 となる必要がある。

P は直線 $y=x+4$ 上の点であるから，P の y 座標は　　$4+4=8$

よって，P の座標は　　(4, 8)

放物線 $y=ax^2$ が，点 (4, 8) を通ればよいから　　$8=a\times4^2$

これを解くと　　$a=\frac{1}{2}$

2 解答　(2, 2)

△OAB と △PAB は，共通な辺 AB をもつ。

よって，△OAB=△PAB となるのは，2 つの三角形の底辺を AB としたときの高さが等しくなるときである。

ゆえに，点 P は，点 O を通り直線 AB に平行な直線と，放物線との交点である。

直線 AB の傾きは 1 であるから，点 O を通り直線 AB に平行な直線の式は　　$y=x$

よって，点 P は，放物線 $y=\frac{1}{2}x^2$ と直線 $y=x$ の交点であるから，$\frac{1}{2}x^2=x$ を解くと

$$x(x-2)=0$$

$$x=0,\ 2$$

点 P は点 O とは異なる点であるから　　$x=2$

$x=2$ のとき $y=2$ であるから，点 P の座標は　　(2, 2)

3 解答　(1)　$(-1+a,\ 1+a^2)$　　(2)　(2, 4)　　(3)　6

(1)　点 O を x 軸方向に a，y 軸方向に a^2 だけ移動した点が A である。線分 OA と線分 BC は平行で長さが等しいから，点 B を x 軸方向に a，y 軸方向に a^2 だけ移動した点が C となる。

よって，点 C の座標は　　$(-1+a,\ 1+a^2)$

(2)　平行四辺形の面積を 2 等分する直線は，平行四辺形の 2 本の対角線の交点を通る。

2 本の対角線の交点は，線分 OC の中点であるから，その座標は

$$\left(\frac{-1+a}{2},\ \frac{1+a^2}{2}\right)$$

直線 $y=\frac{1}{2}x+\frac{9}{4}$ が，この点を通るから

$$\frac{1+a^2}{2}=\frac{1}{2}\times\frac{-1+a}{2}+\frac{9}{4}$$

$$2a^2-a-6=0$$

$$(a-2)(2a+3)=0$$

$$a=2,\ -\frac{3}{2}$$

$a>0$ であるから　　$a=2$

$a=2$ のとき $a^2=4$ であるから，点 A の座標は　　(2, 4)

(3)　$\triangle OAB=\frac{1}{2}\times(4+1)\times\{2-(-1)\}-\left(\frac{1}{2}\times2\times4+\frac{1}{2}\times1\times1\right)$

$=3$

平行四辺形 OACB の面積は，△OAB の面積の 2 倍であるから　　$3\times2=6$